Warp model

著者	古尾谷 泉
出版者	法政大学多摩研究報告編集委員会
雑誌名	法政大学多摩研究報告
巻	30
ページ	49-56
発行年	2015-05-30
URL	http://hdl.handle.net/10114/11543

Warp model

古尾谷　泉

Warp model

Izumi FURUOYA

Abstract

我々の考えによれば、素粒子物理における energy-momentum space は平坦ではない、電荷の値を変えないように反って（warp）いるのである。その結果、世代が生まれ、また、空間反転の不変性に、破れを引き起こす。この論文では、energy-momentum space が反っている一つの根拠をあたえる。

1　はじめに

電子の電荷 e は、他の粒子、例えば、陽子についても、符号は異なるが、大きさは正確に等しい、注）と考えられている。（ quark は分数の電荷を持つが、この粒子は単体では現れない。）我々は、この事実を以下のように定式化する。

我々の model における、電荷に関する要請

“古典的な意味で、電子の電荷の値は、相互作用の incorporation によって、変わってはならない恒常的な不変量である。”

このことは、次のように言い換えられる、

“古典的な意味で、電子の電荷の値は、相互作用の強さによって、変わってはならない恒常的な不変量である。”ここで、相互作用とは、直接、測定に用いられる力であるから、この力は long range force でなければならない。

この要請について具体的に説明する。

電子を記述する自由場の　Dirac equation は

$$(\gamma^0 p^0 - \gamma^i p^i - m_0)\phi = 0, \tag{1}$$

である。また、この場合の電荷および電流密度は、それぞれ

$$\rho_f{}^0 = e\overline{\phi}\gamma^0\phi \quad \text{および} \quad j_f{}^i = e\overline{\phi}\gamma^i\phi, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{2}$$

である。電磁場が存在する場合の Dirac equation は、電磁場の potential を $(A_0,\ A_i)$,. $i = 1, 2, 3$, とすると、Eq.(1) で置き換え、

注）$|\,Q_p + Qe^-\,| \leqq 10^{-15} e$　および　$|\,Q_n\,| \leqq 10^{-15} e$

$$p_0 \to p_0 - eA_0 \quad \text{および} \quad p_i \to p_i - eA_i,\ i = 1,\ 2,\ 3, \tag{3}$$

で得られる。このようにして

$$(\gamma^0(p^0 - eA^0) - \gamma^i(p^i - eA^i) - m)\varphi = 0, \tag{4}$$

が得られる。この場合の電荷 および 電流密度は、それぞれ

$$\rho_{in}{}^0 = e\overline{\varphi}\gamma^0\varphi \quad \text{および} \quad \rho_{in}{}^i = e\overline{\varphi}\gamma^i\varphi,\ \ i = 1,\ 2,\ 3, \tag{5}$$

である。

ρ_{in}^0 の中には、真空偏極等の効果が含まれているが、仮に、これらの量子効果を除くことが出来たとしても、Eq.(1) と Eq.(4) とは異なるので、一般には

$$\rho_{in}{}^0 \neq \ \rho_f{}^0, \tag{6}$$

である。

しかし、我々の model では、Eq.(6) を否定し

$$\rho_{in}{}^0 = \rho_f{}^0, \tag{7}$$

であることを要請する。

2. 電荷の恒常性の数学的表現

電荷電流密度 $(\rho \quad j^i)$, $i = 1,\ 2,\ 3$, は 4 次元　Minkowski space における 4-vector である。従って、座標系が変わると ρ の値も変わってしまう。そこで、ρ の議論には、ρ を座標系に依らない、不変な形に書き直しておいた方が便利である。(相対論における固有時を考えればよい)。そこで、ρ を“相対論的”に不変な形

$$\|\rho\| = \sqrt{\ \ \eta_{\lambda\mu} j^\lambda j^\mu},\ \lambda,\ \mu = 0,\ 1,\ 3,,,.\ n, \tag{8}$$

を電荷密度として採用しよう。ここでは、空間の次元を、一般に、n 次元　としておく。

このことから、我々の要請は

$$\text{相互作用の強さによらず} \quad \|\rho\| = const. \tag{9}$$

と表現できる。

4 次元の Lorentz 変換、Eq.(3) の相互作用の incorporation、および、Eq.(9) の電荷の不変性の条件、この三者を同時に満たすことは、4 次元 Minkowski space では、空間が狭すぎて不可能である。そこで、物理空間の次元は、Eq.(8) で $n \geqq 5$ でなければならない。

3. Warp space

前に述べた電荷に関する要請を満たす空間を、具体的に、以下のように設定する。このタイプの空間は素粒子物理学における hierarchy structure の説明などに使われている。[1)]

まず、5 次元 Minkowski space を考える。そして、この空間内に、5 次元直交座礁系を設置し、その座礁軸を $(x^o \quad x^i \quad \xi)$ $i=1, 2, 3,$ とする。ここで、 $x^0=t$ および $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, である。 ξ は我々の model space に新しく導入された extra な座礁である。次に、この 5次元 Minkowski space に 超曲面を埋め込み、この超曲面上に不変線素

$$ds^2 = e^{(-2\xi/a)}(dx^{0\,2} - dx^{i\,2}) - d\xi^2, \tag{10}$$

が与えられているものとする。ここで、a は定数とする。そして、この超曲面を我々の物理空間とする。したがって、この model space における基本 metric tensor は

$$(g_{\lambda\mu}) = \begin{vmatrix} e^{(-2\xi/a)} & & & & \\ & -e^{(-2\xi/a)} & & & \\ & & -e^{(-2\xi/a)} & & \\ & & & -e^{(-2\xi/a)} & \\ & & & & -1 \end{vmatrix}, \lambda, \mu = 0, 1, 2, 3, \xi, \tag{11}$$

となる。

次に、 μ を質量の dimension をもつ量として

$$q^0 = \mu dx^0/ds. \quad q^i = \mu dx^i/ds, \quad i = 1, 2, 3, \text{および } q^\xi = \mu d\xi/ds. \tag{12}$$

とおく。これらは 我々の model space における energy- momentum であり、5-vector をなす。また、この energy-momentum は、Eq.(10) と Eq.(12) とから

$$\mu^2 = e^{(-2\xi/a)}(q^{0\,2} - q^{i\,2}) - q^{\xi\,2}, \tag{13}$$

を満たすことがわかる。

次に、我々の model space における相互作用について考えよう。そのために、まず、我々の model space に 電磁場の potential を拡張しなければならない。我々の model space は 5 次元空間であるから vector の成分は 5 個なければならない。そこで、通常の Minkowski space における potential の他に、新たに ξ 成分を加えて、我々の model space における電磁場の potential を (A^o, A^i, A^ξ), $i=1, 2, 3,$ であるとしよう。次に、電子と電磁場との相互作用は通常の 4 次元 Minkowski space における形をそのまま拡張して

$$q^0 \to Q^0 = q^0 - eA^0, \; q^i \to Q^i = q^i - eA^i, \; i = 1, 2, 3, \text{および } q^\xi \to Q^\xi = q^\xi - eA^\xi, \tag{14}$$

と置き換えることによってえられるとしよう。この (Q^0, Q^i, Q^ξ) は 5-vector であり、次の関係式を満たす。

$$\mu^2 = e^{(-2\xi/a)}(q^{0\,2} - q^{i\,2}) - q^{\xi\,2} = e^{(-2\xi'/a)}(Q^{0\,2} - Q^{i\,2}) - Q^{\xi'\,2}, \tag{15}$$

Eq, (15) の第３式で ξ を ξ' と書いたのは、当然、第２式と第３式とでは、その値がことなるからである。

Eq. (15) が成立することをたしかめよう。自由な電子の速度 $v^\lambda = dx^\lambda/ds = q^\lambda/\mu$，$\lambda = 0, 1, 2, 3, \xi$，であるから、電流は $j^\lambda = ev^\lambda = (e/\mu)q^\lambda$，$\lambda = 0, 1, 2, 3, \xi$，である。同様に、相互作用している電子の速度は $V^\lambda = Q^\lambda/\mu$，$\lambda = 0, 1. 2. 3. \xi$，であり、したがって、電流は $J^\lambda = (e/\mu)Q^\lambda$ である。これらを 我々の電荷の不変性を表す式、すなわち、Eq.(8) を具体的に我々の model space で表現した式

$$\| e \| = \sqrt{(e^{(-2\xi/a)}(j^{0\,2} - j^{i\,2}) - j^{\xi\,2})} = \sqrt{(e^{(-2\xi'/a)}(J^{0\,2} - J^{i\,2}) - J^{\xi'2})}, \tag{16}$$

に代入すれば Eq. (15) がえられる。

4. Semi-empirical mass formula

ここでは、古典論で考える。

我々の model space における基本的な方程式は

$$q^{0\,2} - q^{i\,2} - e^{(2\xi/a)}(\mu^2 + q^{\xi\,2}) = 0, \tag{17}$$

である。rest frame , すなわち、 $q^i = 0$，$q^\xi = 0$ および q^0 の最小値を M とすると、Eq.(17) から

$$M = \mu e^{(\xi/a)}, \tag{18}$$

となる。

ここで、粒子 μ が余次元空間内を伝播し potential $e^{(\xi/a)}$ 内に吸収される場合を想定しよう。そのため、 a は complex number としよう。（これは原子核反応理論における optical potential からの類推である。）

$$1/a = \rho + i\sigma, \quad \rho, \sigma \quad \text{real number} \tag{19}$$

とおく。これより

$$M = \mu e^{\rho\xi}(\cos(\sigma\ \xi) + i\sin(\sigma\ \xi)), \tag{20}$$

となる。質量は real number でなければならないから、実数部分で最小なものを探そう。そして、その位置を探そう。（虚数部は崩壊巾に対応する。）ここで、まず、簡単のため Eq.(20) 内の $e^{\rho\xi}$ 項の変化は無視すれば、その位置は

$$\cos(\sigma\ \xi) = -1, \tag{21}$$

$$\sin(\sigma\ \xi) = 0, \tag{22}$$

であることがわかる。 Eq.(21) と Eq.(22) とを満たすのは

$$\xi = (2n-1)\pi/\sigma,\ n = 1,\ 2,\ 3\cdots \tag{23}$$

となるが、これを Eq.(18) に代入すれば

$$M = \mu e^{(\rho/\sigma)(2n-1)\pi},\ n = 1,\ 2,\ 3,,, \tag{24}$$

となる。Eq.(21) から、粒子は potential $e^{(\xi/a)}$ の最も energy の低い位置におり、しかも、Eq.(22) から、崩壊巾が零の安定した位置にいることがわかる。このことから、Eq.(24) の M を physical mass と同定しよう。[2)]

Eq.(24) の両辺の対数をとれば

$$\log M = \log\mu + (\rho/\sigma)(2n-1)\pi,\ n = 1,\ 2,\ 3, \tag{25}$$

となる。

ここで、n を世代番号にとれば、素粒子の質量 の対数値を、世代に対して plot すれば、直線上に乗るはずである。このことを示したのが、Fig. (1)、Fig. (2) 、および、Fig (3) である。用いられた parameter の値は表に示してある。lepton では、多少、“ずれ” がみられるが、down quark および、up quark では、全体としての一致は良いといえよう。

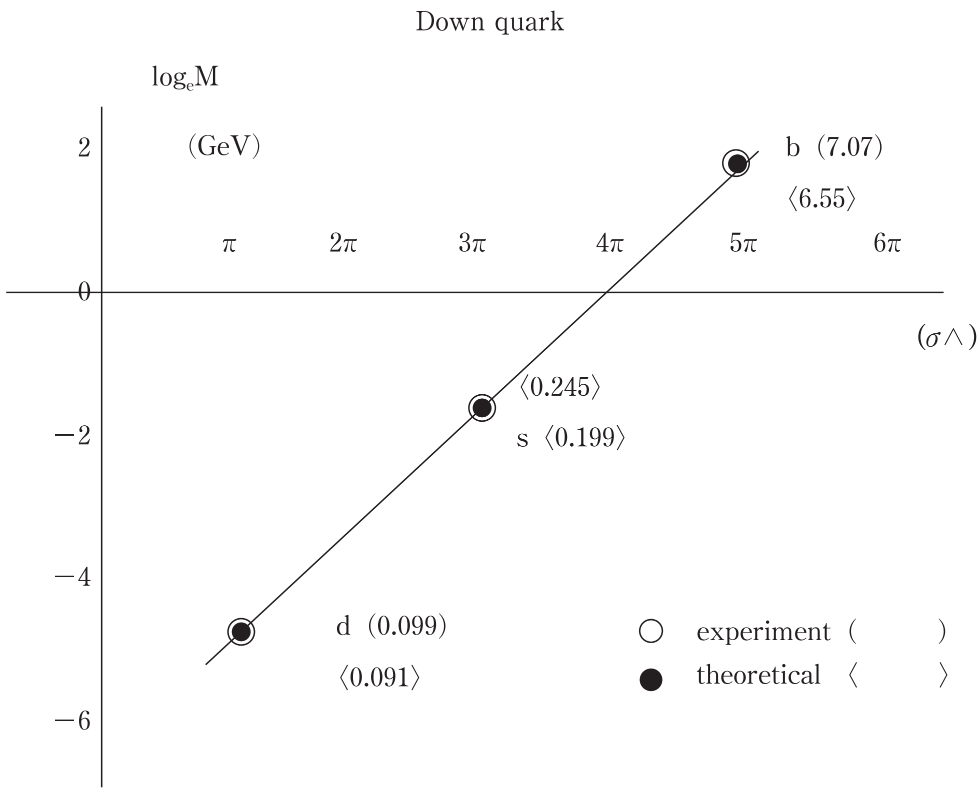

Fig. 1

Up quark

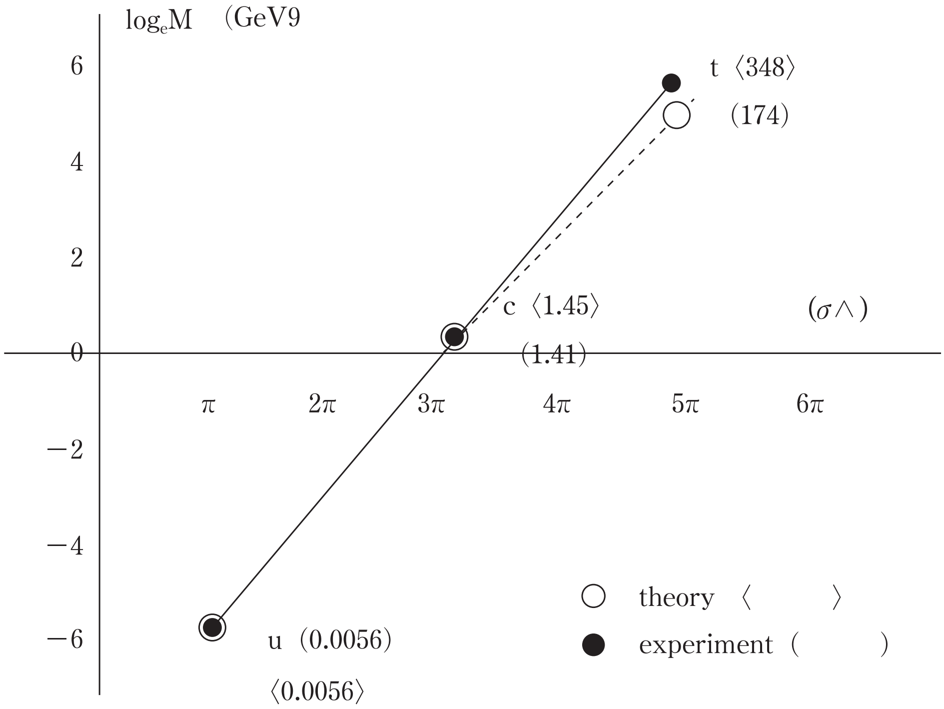

Fig. 2

Lepton

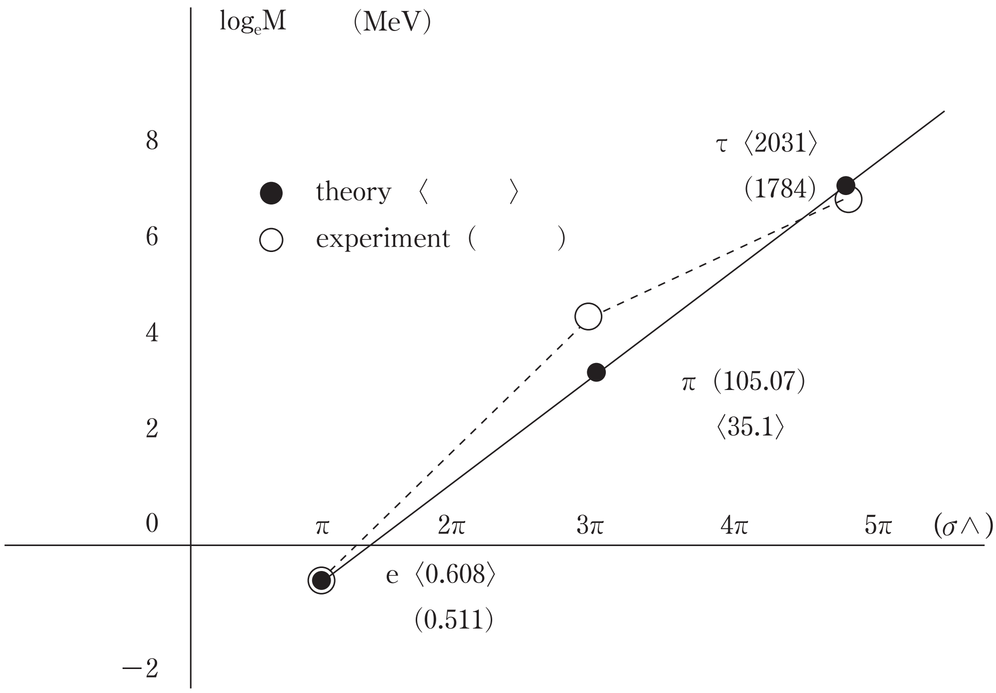

Fig. 3

Eq. (24) で $e^{\rho\xi}$ 項の変化を考慮すれば、Eq. (23) における ξ の位置が全体として、 $\delta=\sin^{-1}(\rho/\sqrt{(\rho^2+\sigma^2)})$ だけずれる。

我々の model では、古典的な意味で自由粒子に相互作用を incorporation する操作によって、電荷の値は変わらないという時空構造をもっている。このような symmetry を持った空間では、そこに住んでいる、すべての観測者にとって、物理法則は同じである。特に、この空間内の異なった２点を結ぶ変換によって、基本的な方程式の形は変わってはならない。例えば、我々の model space における scalar 粒子の方程式は

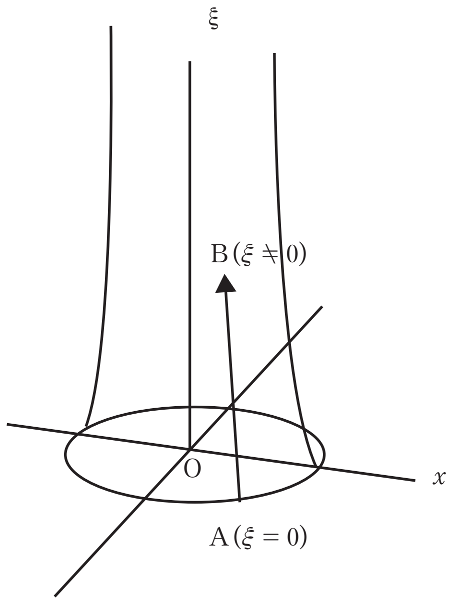

Fig. 4

$$\left(e^{(-2\xi/a)}(-\partial_0{}^2+\partial_i{}^2)+\partial_\xi{}^2\right)\phi(x^0x^i\xi)=\mu^2\phi(x^0x^i\xi), \tag{26}$$

である。この形から 質量 μ はこの方程式の固有値であることがわかる。

図の $\xi=0$ の A 点における scalar 粒子の方程式は、上の式から多少書き直して

$$(\partial_0{}^2-\partial_i{}^2-\partial_\xi{}^2+\mu^2)\phi(x^0x^i\xi)=0, \tag{27}$$

となる。A 点における energy momentum を $(q^0\ \ q^i\ \ q^\xi)$ また、B 点におけるそれを $(Q^0\ \ Q^i\ \ Q^\xi)$ とし、更に、 $q^\xi=Q^\xi=0$ ととると、Eq.(15) より

$$q^{02}-q^{i2}=e^{(-2\xi/a)}(Q^{02}-Q^{i2}), \tag{28}$$

となる。また、A 点における座礁系を $(x^0\ \ x^i\ \ 0)$ および、B 点における座礁系を $(\overline{x^0}\ \ \overline{x^i}\ \ \xi)$ とし、両者の座礁軸の方向を一致させておけば、A 点から B 点への座標変換（rescaling）

$$\begin{aligned}\overline{x^0}&=e^{(-\xi/a)}x^0\\ \overline{x^i}&=e^{(-\xi/a)}x^i,\ i=1,\ 2,\ 3,\end{aligned} \tag{29}$$

をうる。これを Eq.(27) に代入して

$$(\overline{\partial_0{}^2}-\overline{\partial_i{}^2}+e^{(-2\xi/a)}(\mu^2-\partial_\xi{}^2))\phi(x^0\ \ x^i\ \ \xi)=0, \tag{30}$$

となる。このことから、$A(\xi=0)$ 点にある質量 μ の粒子を $B(\xi\neq0)$ 点にいる観測者は、同じ粒子の質量を $\mu e^{(\xi/a)}$ と観測することになる。我々の model では、このことが、potential の周期性と相まって、世代がうまれる、のである。

例として，Fig. (5) は down quark の warp potential の図である。図の 0 点にある down quark の $\mu=1.93\times10^{-3}\,GeV$ （表より）の質量を、第一世代の A 点にいる観測者は、この質量を 0.0091 GeV と測定し、また、第二世代の B 点にいる観測者は同じ物体の質量を 0.245 GeV と測定する。更に、第三世代にいる観測者は、その物体を 6.55 GeV と測定することになる。

Mass formula の parameter

	μ	$<\rho/\sigma>$
lepton	1.20×10^{-1}	0.650
down quark	1.93×10^{-3}	0.523
up quark	3.61×10^{-4}	0.579

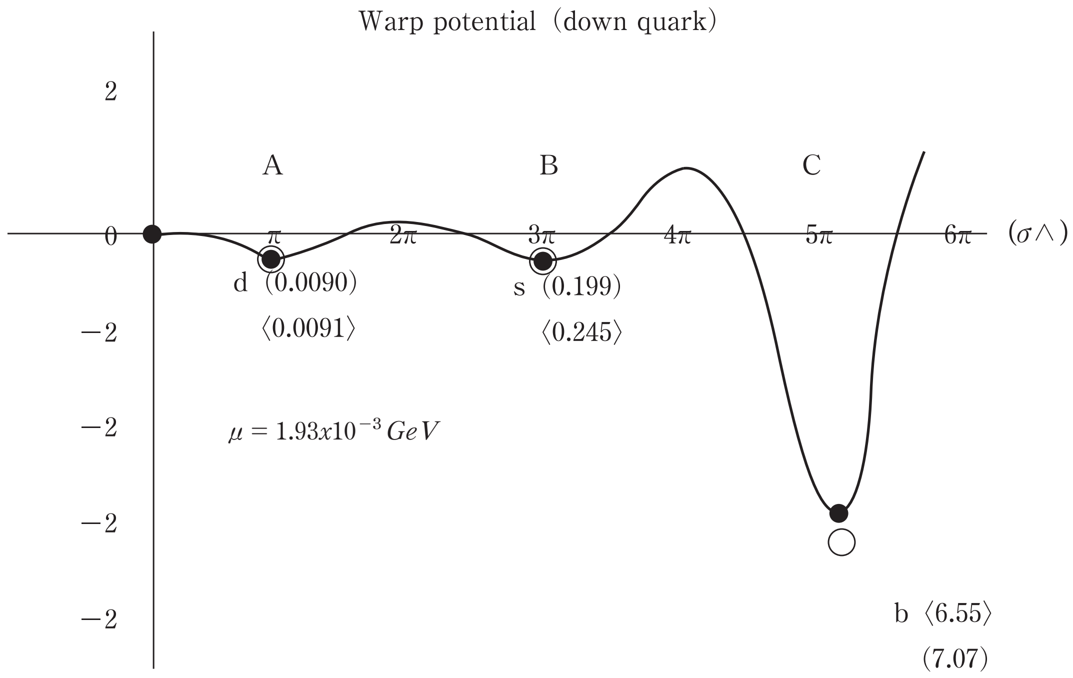

Fig. 5

References

1) L.Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 3370, L.Randall, R. Sundrum. Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 4690

2) F. Grand, J. Nuyts, Nucl. Phys. B811 (2009) 123